

Teoría Cuántica de Campos

2^{do} cuatrimestre 2006 - Gustavo Lozano

guía 1: Cuantificación de un sistema de partículas y Teoría de Campos Clásicas

1. Considere una cadena unidimensional de partículas de masa m con acoplamiento cuadrático a primeros vecinos $\frac{\kappa}{2}(q_{n+1} - q_n)^2$ con q_n el apartamiento de la posición de equilibrio de la n -ésima partícula.

- (a) Escriba el lagrangiano y el hamiltoniano del sistema. Encuentre las ecuaciones de movimiento. ¿Cuál será la ecuación que corresponde al límite continuo (es decir cuando la diferencia entre vecinos $a \equiv (q_{n+1} - q_n) \rightarrow 0$ y $n \rightarrow \infty$)? Muestre que la velocidad del sonido es en este caso $v = \sqrt{a^2 \kappa / m}$
- (b) Volviendo al caso discreto, considerando condiciones de contornos periódicas, encuentre los modos normales $q_n(t) = \sum_n a_k(t) u_n^k$; encuentre la relación de dispersión $\omega_k(k, \kappa, a)$, el hamiltoniano y halle explícitamente la solución de los modos normales en función del tiempo.
- (c) Calcule los corchetes de Poisson

$$\begin{aligned} \{b_k, b_{k'}\} &= \{b_k^*, b_{k'}^*\} = 0 \\ \{b_k, b_{k'}^*\} &= \frac{-i}{2m\omega_k} \delta_{kk'} \end{aligned}$$

- 2. Cuantifique el sistema anterior. Es decir, reemplace las variables de posiciones y momentos q_n y p_n por operadores \hat{q}_n y \hat{p}_n que satisfagan las reglas de conmutación usuales, expanda la solución en la base de modos normales, encuentre los operadores de creación y destrucción y el operador hamiltoniano \hat{H} . Calcule su espectro (el conjunto de sus autovalores).
- 3. Se definen los estados coherentes de un oscilador armónico en una dimensión como los autoestados del operador de destrucción a ,

$$a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$.

- (a) Demuestre que

$$|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} e^{\lambda a^\dagger} |0\rangle$$

es un estado coherente normalizado.

- (b) Demuestre que estos estados verifican la relación de mínima incerteza.
- (c) Pruebe que un estado coherente se puede obtener también mediante la aplicación del operador de traslación $\exp(-ipl/\hbar)$ (siendo l la distancia desplazada) al estado fundamental.
- (d) Escriba la función de onda en el espacio de coordenadas correspondiente al estado $|\lambda\rangle$.
- (e) Halle la evolución temporal de $|\lambda\rangle$ desarrollándolo en la base $\{|n\rangle\}$ de autoestados del Hamiltoniano \hat{H} . Muestre que el estado continúa siendo autoestado del operador a , pero que el autovalor λ varía en el tiempo. Dibuje en el plano complejo la evolución de λ y muestre como varían $\langle H \rangle$ y $\langle p \rangle$ en el tiempo.
- (f) Deduzca y resuelva las ecuaciones de evolución en la representación de Heisenberg para los operadores a y a^\dagger .
- (g) Si se mide la energía del sistema, ¿qué valores pueden obtenerse y con qué probabilidades?

4. Sea $\phi(x, t)$ un campo escalar y consideremos la siguiente densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2$$

y el lagrangiano

$$L(t) = \int \mathcal{L} d^3x$$

- (a) Con el objetivo de comparar el lagrangiano de un sistema continuo con el de un sistema de n partículas, diga como se traducen al caso discreto los objetos que se dan a continuación:
- x
 - $\phi(x, t)$
 - la integral $\int d^3x$ que figura en $L(t)$
- (b) ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema continuo mencionado arriba?
- (c) En un sistema de n partículas, ¿Bajo que condiciones el lagrangiano del sistema es la suma de los lagrangianos individuales de cada partícula?
- (d) Una vez resuelto el item anterior, mire la expresión dada arriba para $L(t)$. ¿Qué quiere decir que una teoría de campos es local?

5. Sea el lagrangiano de Klein-Gordon para un campo escalar complejo,

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^*.$$

- (a) Halle las ecuaciones de movimiento para los campos en dicho lagrangiano.
- (b) Suponga $m = 0$ y $\phi^* = \phi$, y halle la corriente que se conserva debido a la simetría que posee el lagrangiano ante la transformación $\phi \rightarrow \phi + \alpha$ ($\alpha = cte$).
- (c) Halle la corriente y su respectiva carga que se conservan debido a la transformación de simetría $\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi$ ($\alpha = cte$).
- (d) ¿Es este lagrangiano invariante de Lorentz? ¿Cuál es el motivo por el que construimos lagrangianos que sean invariantes de Lorentz?

6. Considere los cuatro lagrangianos siguientes

$$\begin{aligned} L_I &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ L_{II} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} (A^\mu_{,\mu})^2 \\ L_{III} &= -\frac{1}{2} A^\mu_{,\nu} A^\nu_{,\mu} \\ L_{IV} &= \frac{1}{2} [A_\mu F^\mu_{,\nu} - A_{\nu,\mu} F^{\mu\nu}] + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

donde $F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}$. Calcule las ecuaciones de movimiento y las corrientes conservadas correspondientes a las invariancias frente a las transformaciones:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$$

donde $\Lambda^{\mu\rho} \Lambda^{\nu\sigma} \eta_{\rho\sigma} = \eta^{\mu\nu}$ y a^μ es un 4-vector constante. Calcule también la corriente conservada correspondiente a las invariancia de gauge

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \xi.$$

En el caso de L_I , las variables son A_μ pero está escritos de esta forma para poner de manifiesto su carácter de invariante de gauge. El segundo, L_{II} , (lagrangiano de Fermi) no es invariante de gauge pero no se necesita condiciones suplementarias para llegar a las ecuaciones de movimiento $\square^2 A_\mu = 0$. El tercero L_{III} , difiere del segundo por un término de divergencia si $\partial_\mu A^\mu = 0$. Finalmente el último (lagrangiano de Schwinger) considera ambos A_μ y $F^{\mu\nu}$ como variables independientes.

7. Sea el lagrangiano del campo escalar complejo, $\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^*$

- (a) Muestre que dicho lagrangiano no es invariante frente a la transformación $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha(x)} \phi$
- (b) Diga como tiene que transformar el campo A_μ de manera tal que frente a la transformación $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha(x)} \phi$ la cantidad $D_\mu \phi$ (donde $D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$) transforme según $D_\mu \phi \rightarrow (D_\mu \phi)' = e^{i\alpha(x)} D_\mu \phi$. ¿Le resulta conocida la regla de transformación del campo A_μ ?

- (c) Considere ahora el nuevo lagrangiano, $\mathcal{L} = D_\mu \phi D^\mu \phi^* - m^2 \phi \phi^*$. Muestre que es invariante frente a las transformaciones $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha(x)} \phi$ y A_μ transforma según lo que encontró en el ítem anterior.
- (d) Dé una interpretación a la cantidad conservada por la simetría de dicho lagrangiano.
- (e) Si ϕ fuese real ¿el lagrangiano tendría dicha simetría? ¿Por qué al campo escalar real se lo llama *neutro* y al complejo *cargado*?

8. Calcule la ecuación de movimiento para el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi \phi + \lambda \phi^n \quad \text{con } n > 2$$

Considere dicha ecuación en los casos $\lambda = 0$ y $\lambda \neq 0$: ¿Cuál es la diferencia fundamental entre ambas? (Ayuda: diferencia en el sentido de clasificación de una ecuación diferencial). Justifique a partir en este ejemplo el criterio que se suele usar para identificar términos libres o de interacción en un lagrangiano.