Parcial de Teoría Cuántica de Campos

1^{er} cuatrimestre 2008 - Gustavo Lozano

1. Considere un campo de Klein Gordon cargado:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi \phi^*$$

   (a) Halle la cantidad conservada que resulta de la invarianza del lagrangiano frente a transformaciones de los campos $U(1)$ globales.

   (b) Cuantize la teoría (canónicamente)

   (c) Muestre que el operador carga

$$\hat{Q} = -i \int d^3x : (\hat{\pi}\hat{\phi} - \hat{\pi}^\dagger \hat{\phi}^\dagger) :$$

   se escribe en función de operadores de creación y destrucción según

$$\hat{Q} = \int d^3p \, (\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p - \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p)$$

   Interprete.

   (d) Muestre que la conservación de la carga se da no sólo a nivel clásico sino también a nivel cuántico, i.e.; $\frac{d\hat{Q}}{dt} = 0$. Ayuda: El operador hamiltoniano puede escribirse como

$$\hat{H} = \int d^3p \, \omega_p \, (\hat{a}_p^\dagger \hat{a}_p + \hat{b}_p^\dagger \hat{b}_p)$$

   (e) Muestre que si $|\alpha\rangle$ es un autoestado del operador $\hat{Q}$ con autovalor q, entonces $\hat{\phi}^\dagger|\alpha\rangle$ también es autoestado del operador $\hat{Q}$ pero con autovalor $q+1$. Interprete.

2. Considere la teoría descripta por el siguiente lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{\partial_\mu}{2}\phi\partial^\mu\phi - \frac{M}{2}^2\phi\phi + \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + g\phi\bar{\psi}\psi$$

   (a) Calcule, utilizando el teorema de Wick, el término de menor orden no nulo en el desarrollo perturbativo del elemento de la matriz de scattering correspondiente al scattering entre un fermión y una partícula escalar (por simplicidad tomemos que los momentos iniciales y finales de cada una de las partículas son distintos y por otro lado impongamos el orden normal en el hamiltoniano de interacción). Para unificar la notación llamemos p_1, s_1 a las variables del fermión y p_2 a las del bosón en el estado inicial y p_3, s_3 a las variables del fermión y p_4 a las del bosón en el estado final.

   (b) Una vez resuelto el item anterior, identifique cada término con su respectivo diagrama de Feynman (indique explícitamente su elección de hacia dónde avanza el tiempo).

Cosas útiles:

PROBLEMA 1

#1

1. $$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi \phi^*$$

(a) la transformación $U(1)$ global es

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha}\phi$$

con α una constante. En este caso:

$$\delta x^\nu = 0$$
$$\delta \phi \neq 0 \rightarrow$$

la corriente conservada será:

$$J_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_i)} \delta \phi_i$$

las variaciones de los campos serán, infinitesimalmente:

$$\phi' = e^{i\alpha}\phi \cong (1 + i\alpha)\phi \rightarrow$$
$$\phi^{*\prime} = e^{-i\alpha}\phi^* \cong (1 - i\alpha)\phi^*$$

$$\delta\phi = \phi' - \phi = i\alpha\phi$$
$$\delta\phi^* = \phi^{*\prime} - \phi^* = -i\alpha\phi^*$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)}\left[\partial_\alpha \phi^* \partial^\alpha \phi - m^2 \phi \phi^*\right] = \partial_\alpha \phi^* \cdot \delta^\alpha_\mu = \partial_\mu \phi^*$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi^*)}\left[\eta_{\alpha\rho}\partial^\rho \phi^* \cdot \partial^\alpha \phi - m^2 \phi \phi^*\right] = \eta_{\alpha\rho}\delta^\rho_\mu \partial^\alpha \phi = \partial_\mu \phi$$

$$J_\mu = \partial_\mu \phi^* \cdot i\alpha\phi + \partial_\mu \phi \cdot (-i\alpha\phi^*)$$

$$J_\mu = i\alpha\left(\partial_\mu \phi^* \cdot \phi - \partial_\mu \phi \cdot \phi^*\right)$$

Esta J_μ cumplirá que: $\boxed{\partial^\mu J_\mu = 0}$

b) La cuantización canónica procederá pasando del formalismo lagrangiano al hamiltoniano mediante la definición de momentos canónicos conjugados

$$\pi_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot\phi} = \dot\phi^*$$
$$\pi_{\phi^*} = \partial \mathcal{L}/\partial \dot\phi^* = \dot\phi$$

Así se construye el hamiltoniano (densidad hamiltoniana) con una Transformación de Legendre:

$$\mathcal{H} = \sum_i \pi_i \cdot \dot{\phi}_i = \mathcal{L}$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\phi, \pi)$$

Luego convertimos los campos a operadores y establecemos relaciones de conmutación a tiempos iguales (usamos conmutación porque son bosones las partículas descriptas por los campos $\phi(x)$). Debe notarse que el '$*$' pasa a '$+$' en el caso de operadores

$$\left.\begin{aligned} &[\hat{\phi}_i(\vec{x},t), \hat{\pi}_j(\vec{x}',t)] = i\,\delta(\vec{x}-\vec{x}')\cdot\delta_{ij} \\ &[\hat{\phi}_i(\vec{x},t), \hat{\phi}_j(\vec{x}',t)] = [\hat{\pi}_i(\vec{x},t), \hat{\pi}_j(\vec{x}',t)] = 0 \end{aligned}\right\}[1]$$

A posteriori podemos expandir los campos en ondas planas y ver que el carácter de operador pasa a los coeficientes de la expansión que cumplirán relaciones de conmutación similares a las de los campos y serán ellos los responsables de crear y destruir las partículas descriptas por la teoría. Es decir de:

$$\hat{\phi}(x^\mu) = \int \frac{d^3p}{[2\omega_p(2\pi)^3]^{1/2}} \left(\hat{a}_p e^{-ipx} + \hat{b}_p^+ e^{ipx}\right)$$

y usar que valen las [1] se obtienen:

$$[\hat{a}_p, \hat{a}^+_{p'}] = \delta(p-p')$$

$$[\hat{b}_p, \hat{b}^+_{p'}] = \delta(p-p')$$

$$[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}] = [\hat{a}^+_p, \hat{a}^+_{p'}] = [\hat{b}_p, \hat{b}_{p'}] = [\hat{b}^+_p, \hat{b}^+_{p'}] = 0$$

La evolución Temporal estará dada por (picture Heisenberg)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\hat{\phi}(\vec{x},t) = [\hat{\phi}(x,t), \hat{H}]$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\hat{\pi}(\vec{x},t) = [\hat{\pi}(x,t), \hat{H}]$$

PROBLEMA 1

#2

(e) $$\hat{Q} = -i\int d^3x \, : \hat{\pi}\hat{\phi} - \hat{\pi}^\dagger\hat{\phi}^\dagger : \qquad [1]$$

En el punto anterior llegamos a identificar

$$\hat{\pi} = \dot{\hat{\phi}}^\dagger \qquad \hat{\pi}^\dagger = \dot{\hat{\phi}}$$

Entonces el integrando en [1] es

$$:\dot{\hat{\phi}}^\dagger\hat{\phi} - \dot{\hat{\phi}}\hat{\phi}^\dagger: \qquad [2]$$

Desarrollamos en función de los campos

$$[2] =: \int d^3p_1\, N_{p_1}\, \partial_t \left(\hat{a}^\dagger_{p_1} e^{ip_1x} + \hat{b}_{p_1} e^{-ip_1x}\right) \times \int d^3p_2\, N_{p_2} \left(\hat{a}_{p_2} e^{-ip_2x} + \hat{b}^\dagger_{p_2} e^{ip_2x}\right) -$$

$$\int d^3p_1\, N_{p_1}\, \partial_t \left(\hat{a}_{p_1} e^{-ip_1x} + \hat{b}^\dagger_{p_1} e^{ip_1x}\right) \times \int d^3p_2\, N_{p_2} \left(\hat{a}^\dagger_{p_2} e^{ip_2x} + \hat{b}_{p_2} e^{-ip_2x}\right):$$

$$= :\underbrace{\int d^3p_1\, N_{p_1} \int d^3p_2\, N_{p_2}\, i\omega_{p_1} \left(\hat{a}^\dagger_{p_1} e^{ip_1x} - \hat{b}_{p_1} e^{-ip_1x}\right) \times \left(\hat{a}_{p_2} e^{-ip_2x} + \hat{b}^\dagger_{p_2} e^{ip_2x}\right)}_{\equiv A}$$

$$- \underbrace{\int d^3p_1\, N_{p_1} \int d^3p_2\, N_{p_2}\, i\omega_{p_1} \left(-\hat{a}_{p_1} e^{-ip_1x} + \hat{b}^\dagger_{p_1} e^{ip_1x}\right) \times \left(\hat{a}^\dagger_{p_2} e^{ip_2x} + \hat{b}_{p_2} e^{-ip_2x}\right)}_{\equiv B}:$$

Operamos en los dos términos por separado:

$$A \quad \left[\hat{a}^\dagger_{p_1}\hat{a}_{p_2} e^{ix(p_1-p_2)} + \hat{a}^\dagger_{p_1}\hat{b}^\dagger_{p_2} e^{ix(p_1+p_2)} - \hat{b}_{p_1}\hat{a}_{p_2} e^{-ix(p_1+p_2)} - \hat{b}_{p_1}\hat{b}^\dagger_{p_2} e^{-ix(p_1-p_2)}\right]$$

$$B \quad \left[-\hat{a}_{p_1}\hat{a}^\dagger_{p_2} e^{-ix(p_1-p_2)} - \hat{a}_{p_1}\hat{b}_{p_2} e^{-ix(p_1+p_2)} + \hat{b}^\dagger_{p_1}\hat{a}^\dagger_{p_2} e^{ix(p_1+p_2)} + \hat{b}^\dagger_{p_1}\hat{b}_{p_2} e^{ix(p_1-p_2)}\right]$$

Intercambiando en B el rol de p_1 y p_2, cosa que puede hacerse porque esas variables están integradas, tenemos que se puede agrupar por factores comunes los siguientes:

$$\left(\{\hat{a}^{+}_{p_1}, \hat{a}_{p_2}\} e^{ix(p_1-p_2)} + [\hat{a}^{+}_{p_1}, \hat{b}^{+}_{p_2}] e^{ix(p_1+p_2)} \right.$$
$$\left. [\hat{a}_{p_2}, \hat{b}_{p_1}] e^{-ix(p_1+p_2)} - \{\hat{b}_{p_1}, \hat{b}^{+}_{p_2}\} e^{-ix(p_1-p_2)} \right)$$

Los conmutadores son nulos porque combinan campos diferentes, entonces resulta

$$[z] = :\int d^3p_1 N_{p_1} \int d^3p_2 N_{p_2}\, i\omega_{p_1} \Big\{ \left(\hat{a}^{+}_{p_1}\hat{a}_{p_2} + \hat{a}_{p_2}\hat{a}^{+}_{p_1}\right) e^{ix(p_1-p_2)}$$
$$- \left(\hat{b}_{p_1}\hat{b}^{+}_{p_2} + \hat{b}^{+}_{p_2}\hat{b}_{p_1}\right) e^{-ix(p_1-p_2)} \Big\}:$$

y como los $\hat{a}, \hat{b}, \hat{a}^{+}, \hat{b}^{+}$ cumplen las siguientes relaciones de conmutación

$$[\hat{a}_{p_i}, \hat{a}^{+}_{p_j}] = \delta(p_i - p_j) = [\hat{b}_{p_i}, \hat{b}^{+}_{p_j}]$$
$$[\hat{a}_{p_i}, \hat{a}_{p_j}] = [\hat{b}_{p_i}, \hat{b}_{p_j}] = 0$$
$$[\hat{a}_{p_i}, \hat{b}_{p_j}] = [\hat{a}^{+}_{p_i}, \hat{b}^{+}_{p_j}] = 0 \quad \ldots$$

resulta que:

$$\hat{a}_{p_2}\hat{a}^{+}_{p_1} = +\hat{a}^{+}_{p_1}\hat{a}_{p_2} + \delta(p_2-p_1)$$
$$\hat{b}_{p_1}\hat{b}^{+}_{p_2} = +\hat{b}^{+}_{p_2}\hat{b}_{p_1} + \delta(p_1-p_2) \quad \rightarrow$$

$$[z] = :\int d^3p_1 N_{p_1} \int d^3p_2 N_{p_2}\, i\omega_{p_1} \Big[\left(2\hat{a}^{+}_{p_1}\hat{a}_{p_2} + \delta(p_2-p_1)\right) e^{ix(p_1-p_2)}$$
$$- \left(2\hat{b}^{+}_{p_2}\hat{b}_{p_1} + \delta(p_1-p_2)\right) e^{-ix(p_1-p_2)} \Big]:$$

$$[z] = :\int d^3p_1 N_{p_1} \int d^3p_2 N_{p_2} 2i\omega_{p_1} \left[a^{+}_{p_1} a_{p_2}\, e^{ix(p_1-p_2)} - b^{+}_{p_2} b_{p_1} e^{-ix(p_1-p_2)} \right]:$$
$$\int d^3p_1 N^2_{p_1} i\omega_{p_1} e^{ix(p_1-p_2)} - \int d^3p_2 N^2_{p_2} i\omega_{p_2} e^{-ix(p_1-p_2)}$$

Intercambiando p_1 con p_2 vemos que los dos últimos términos se opositan (su suma es cero. Metiendo la integral $\int d^3x$ dentro del orden normal

$$\hat{Q} = -i :\int d^3p_1 N_{p_1} \int d^3p_2 N_{p_2} 2i\omega_{p_1} \Big[\hat{a}^{+}_{p_1}\hat{a}_{p_2} \underbrace{\int d^3x\, e^{ix(p_1-p_2)}}_{\sim\delta} - \hat{b}^{+}_{p_2}\hat{b}_{p_1} \underbrace{\int d^3x\, e^{-ix(p_1-p_2)}}_{\sim\delta} \Big]:$$

donde los factores en negro son proporcionales a deltas de Dirac; con una normalización adecuada.

PROBLEMA 1
#3

Usando que:

$$\delta^3(\vec x-\vec x') = \int \frac{d^3 z}{(2\pi)^3} e^{-i\vec z\cdot(\vec x-\vec x')}$$

y teniendo en cuenta el detalle siguiente:

$$\int d^3x\, e^{iX(P_1-P_2)} = e^{i(\omega_{p_1}-\omega_{p_2})t}\int d^3x\, e^{-i\vec x(\vec p_1-\vec p_2)}$$

$$\int d^3x\, e^{-iX(P_1-P_2)} = e^{-i(\omega_{p_1}-\omega_{p_2})t}\int d^3x\, e^{i\vec x(\vec p_1-\vec p_2)}$$

$$iX(P_1-P_2) = iXP_1 - iXP_2 = i\omega_{p_1}t - i\vec x\cdot\vec p_1 - i\omega_{p_2}t + i\vec x\cdot\vec p_2$$

$$\hat Q = -i:\int d^3\vec p_1 N_{p_1}\int d^3\vec p_2 N_{p_2}\, i\omega_{p_1}\, 2(2\pi)^3\Big(\hat a^+_{p_1}\hat a_{p_2}\,\delta^3(\vec p_1-\vec p_2)\, e^{i(\omega_{p_1}-\omega_{p_2})t} - \hat b^+_{p_2}\hat b_{p_1}\,\delta^3(\vec p_1-\vec p_2)\, e^{-i(\omega_{p_1}-\omega_{p_2})t}\Big)$$

Colapsando las deltas de Dirac se tiene:

$$\hat Q = -i:\int d^3\vec p_1\, N_{p_1} N_{p_1}\, i\omega_{p_1}\, 2(2\pi)^3\left(\hat a^+_{p_1}\hat a_{p_1} - \hat b^+_{p_1}\hat b_{p_1}\right)$$

, usando la normalización $N_p = \frac{1}{\sqrt{2\omega_p(2\pi)^3}} \Rightarrow N_p^2 = \frac{1}{2\omega_p(2\pi)^3}$

$$\hat Q = :\int d^3\vec p_1\left(\hat a^+_{p_1}\hat a_{p_1} - \hat b^+_{p_1}\hat b_{p_1}\right):$$

Cambiando la variable de integración una vez más de $p_1 \to p$

$$\boxed{\hat Q = \int d^3\vec p\left(\hat a^+_p\hat a_p - \hat b^+_p\hat b_p\right)}$$

Esto se interpreta como la carga neta porque:

$\hat a^+_p\hat a_p \equiv$ operador # de partículas que representa 'a' (del tipo 'a')

$\hat b^+_p\hat b_p \equiv$ operador # de partículas que representa 'b' (del tipo 'b')

Entonces la carga neta será la diferencia numérica entre un tipo de partículas y el otro (una especie de densidad de

Carga integrada en todos los momentos.

PROBLEMA 1

#4

(d) A nivel atómico se tiene

$$i\hbar\dot{\hat{Q}} = [\hat{Q}, \hat{H}] \rightarrow$$

Se reduce la evolución de $\hat{Q}$ a ver qué es lo que da el conmutador

$$\left[\hat{a}_p^+ \hat{a}_p - \hat{b}_p^+ \hat{b}_p \, , \; \hat{a}_{p'}^+ \hat{a}_{p'} + \hat{b}_{p'}^+ \hat{b}_{p'}\right] \qquad (1)$$

Usamos que:

$$[A-B, A'+B'] = (A-B)(A'+B') - (A'+B')(A-B)$$
$$= AA' - BA' + AB' - BB'$$
$$- A'A - B'A + A'B + B'B$$
$$= [A, A'] + [A, B']$$
$$+ [A', B] + [B', B] \qquad (2)$$

Aplicando este desarrollo (2) a (1) tenemos los siguientes conmutadores:

$$[A, A'] = [\hat{a}_p^+ \hat{a}_p \, , \hat{a}_{p'}^+ \hat{a}_{p'}] \qquad (I)$$

$$[A, B'] = [\hat{a}_p^+ \hat{a}_p \, , \hat{b}_{p'}^+ \hat{b}_{p'}] \qquad (II)$$

$$[A', B] = [\hat{a}_{p'}^+ \hat{a}_{p'} \, , \hat{b}_p^+ \hat{b}_p] \qquad (III)$$

$$[B', B] = [\hat{b}_{p'}^+ \hat{b}_{p'} \, , \hat{b}_p^+ \hat{b}_p] \qquad (IV)$$

los Conmutadores II y III son nulos porque vincularán conmutadores de $\hat{a}$ con $\hat{b}$ los cuales siempre son nulos. Interesarán I y IV.

Partiendo de que vale:

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

deducimos una regla para

$$[Z.D, BC] = [Z.D, B]C + B[Z.D, C]$$
$$= -[B, ZD]C - B[C, ZD]$$
$$= -([B, Z]D + Z[B, D])C$$
$$- B([C, Z]D + Z[C, D])$$

$$[Z.D, B.C] = ([Z, B]DC + Z[D, B]C$$
$$+ B[Z, C]D + BZ[D, C])$$

Las aplicamos a I →

$$[\hat{a}^+_p \hat{a}_p , \hat{a}^+_{p'} \hat{a}_{p'}] = \Big(\underbrace{[\hat{a}_p, \hat{a}^+_{p'}]}_{=0} \cdots + \hat{a}^+_p [\hat{a}_p, \hat{a}^+_{p'}] \hat{a}_{p'}$$

$$+ \hat{a}^+_{p'} [\hat{a}^+_p , \hat{a}_{p'}] \hat{a}_p + \ldots \underbrace{[\hat{a}_p, \hat{a}_{p'}]}_{=0} \Big)$$

$$= \hat{a}^+_p \, \delta(p-p') \, \hat{a}_{p'} + \hat{a}^+_{p'} (-[\hat{a}_{p'}, \hat{a}^+_p]) \hat{a}_p$$

$$= \hat{a}^+_p \hat{a}_p - \hat{a}^+_p \hat{a}_p = 0$$

Procediendo en modo idem con el conmutador de

$$[\hat{b}^+_p \hat{b}_{p'}, \hat{b}^+_p \hat{b}_p]$$

llegamos al resultado requerido

$$[\hat{Q}, \hat{H}] = 0 \rightarrow \dot{\hat{Q}} = 0 \Rightarrow$$ LA CARGA SE conserva a nivel cuántico

(e)

$$\hat{Q} |\alpha\rangle = q |\alpha\rangle \quad y$$

$$\hat{Q} = \int d^3p \left(\hat{a}^+_p \hat{a}_p - \hat{b}^+_p \hat{b}_p \right)$$

$$\hat{\phi}^+ = \int d^3p' \, N_{p'} \left(\hat{a}^+_{p'} e^{ip'x} + \hat{b}_{p'} e^{-ip'x} \right) \rightarrow$$

$$\hat{Q} \hat{\phi}^+ = \int d^3p \int d^3p' \, N_{p'} \Big(e^{ip'x} \underbrace{\hat{a}^+_p \hat{a}_p \hat{a}^+_{p'}}_{A} + e^{-ip'x} \underbrace{\hat{a}^+_p \hat{a}_p \hat{b}_{p'}}_{B}$$

$$- e^{ip'x} \underbrace{\hat{b}^+_p \hat{b}_p \hat{a}^+_{p'}}_{C} - e^{-ip'x} \underbrace{\hat{b}^+_p \hat{b}_p \hat{b}_{p'}}_{D} \Big)$$

Operando con las relaciones de conmutación se tiene

$$A \qquad \hat{a}^+_p \hat{a}_p \hat{a}^+_{p'} = \hat{a}^+_p \left(\delta(p-p') + \hat{a}^+_{p'} \hat{a}_p \right) = \delta(p-p') \, \hat{a}^+_p + \hat{a}^+_{p'} \hat{a}^+_p \hat{a}_p$$

$$B \qquad \hat{a}^+_p \hat{a}_p \hat{b}_{p'} = \hat{b}_{p'} \hat{a}^+_p \hat{a}_p$$

$$C \qquad \hat{b}^+_p \hat{b}_p \hat{a}^+_{p'} = \hat{a}^+_{p'} \hat{b}^+_p \hat{b}_p$$

$$D \qquad \hat{b}^+_p \hat{b}_p \hat{b}_{p'} = \hat{b}^+_p \hat{b}_{p'} \hat{b}_p = \left(\hat{b}_{p'} \hat{b}^+_p - \delta(p'-p) \right) \hat{b}_p =$$

$$\hat{b}_{p'} \hat{b}^+_p \hat{b}_p - \delta(p'-p) \hat{b}_p$$

PROBLEMA 1
5

aplicando a un ket α será:

$$\int d^3p \int d^3p' N_{p'} \Big(e^{ip'x}\delta(p-p')\,\hat{a}_p^{+} + e^{ip'x}\,\hat{a}_{p'}^{+}\hat{a}_p^{+}\hat{a}_p + e^{-ip'x}\,\hat{b}_{p'}\hat{a}_p^{+}\hat{a}_p - e^{ip'x}\,\hat{a}_{p'}^{+}\hat{b}_p^{+}\hat{b}_p - e^{-ip'x}\,\hat{b}_{p'}\hat{b}_p^{+}\hat{b}_p + e^{-ip'x}\,\delta(p'-p)\,\hat{b}_p \Big) |\alpha\rangle =$$

$$\int d^3p \int d^3p' N_{p'} \Big(e^{ip'x}\delta(p-p')\hat{a}_p^{+} + e^{ip'x}\,\hat{a}_{p'}^{+}\left(\hat{a}_p^{+}\hat{a}_p - \hat{b}_p^{+}\hat{b}_p\right) + e^{-ip'x}\delta(p'-p)\,\hat{b}_p + e^{-ip'x}\,\hat{b}_{p'}\left(\hat{a}_p^{+}\hat{a}_p - \hat{b}_p^{+}\hat{b}_p\right) \Big) |\alpha\rangle =$$

$$\Big(\int d^3p\, N_p e^{ipx}\hat{a}_p^{+} + \int d^3p' N_{p'} e^{ip'x}\,\hat{a}_{p'}^{+} \int d^3p \left(\hat{a}_p^{+}\hat{a}_p - \hat{b}^{+}\hat{b}_p\right) + \int d^3p\, N_p e^{-ipx}\,\hat{b}_p + \int d^3p' N_{p'} e^{-ip'x}\,\hat{b}_{p'} \int d^3p \left(\hat{a}_p^{+}\hat{a}_p - \hat{b}_p^{+}\hat{b}_p\right) \Big) |\alpha\rangle =$$

$$\Big(\int d^3p\, N_p\, e^{ipx}\hat{a}_p^{+} + q \int d^3p' N_{p'}\, e^{ip'x}\hat{a}_{p'}^{+} + \int d^3p\, N_p\, e^{-ipx}\hat{b}_p + q \int d^3p' N_{p'}\, e^{-ip'x}\hat{b}_p \Big) |\alpha\rangle =$$

juntando los dos términos de $\hat{\phi}^{+}$ y pasando p a p' se tiene:

$$\hat{\phi}^{+}(1+q)|\alpha\rangle = (1+q)\,\hat{\phi}^{+}|\alpha\rangle =$$
$$\hat{Q}\left[\hat{\phi}^{+}|\alpha\rangle\right] = (q+1)\left[\hat{\phi}^{+}|\alpha\rangle\right] \rightarrow$$

$\hat{\phi}^{+}|\alpha\rangle$ es autoestado de $\hat{Q}$ con autovalor $q+1$

La idea es que $\hat{\phi}^{+}$ sobre $|\alpha\rangle$ crea una partícula de carga 'a' y destruye una de carga 'b' con lo cual la carga del sistema sube en una unidad. Asimismo dado que $\hat{Q}$ sobre $|\alpha\rangle$ da como autovalor la carga neta, sobre $\hat{\phi}^{+}|\alpha\rangle$ será la carga de $|\alpha\rangle$ incrementada en una unidad.

PROBLEMA 2

#1

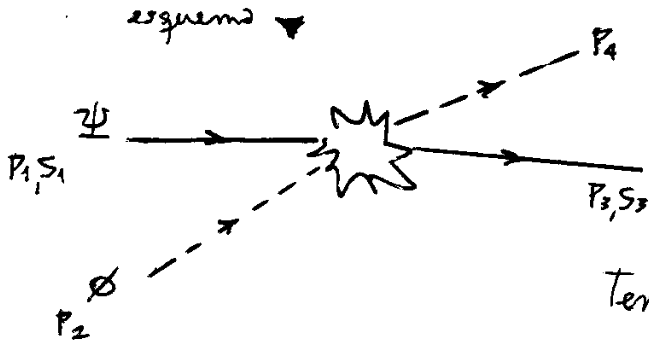
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - \frac{M^2}{2}\phi^2 + \bar{\Psi} i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi + g\,\phi\,\bar{\Psi}\Psi$$

(a)

$\mathcal{L}^I = +g\,\phi\,\bar{\Psi}\Psi \Rightarrow$ es un término de interacción con tres campos

$\mathcal{H}^I = -g\,\phi\,\bar{\Psi}\Psi$ (vértices de 3 patas)

esquema ▼



$$|i\rangle = \hat{a}^+_{p_2}\,\hat{b}^+_{p_1 s_1}|0\rangle$$
$$|f\rangle = \hat{a}^+_{p_4}\,\hat{b}^+_{p_3 s_3}|0\rangle$$

Tenemos dos partículas en el estado inicial y dos partículas en el estado final. El operador de scattering será

$$\hat{S} = \mathbb{1} - i\int d^4x : \mathcal{H}^I : + \frac{(-i)^2}{2!}\int d^4x_1 \int d^4x_2 \; T(:\mathcal{H}^I_{(1)}::\mathcal{H}^I_{(2)}:)$$

Con lo cual a orden cero tenemos

$$\langle f|i\rangle = \langle 0|\,\hat{b}_{p_3 s_3}\,\hat{a}_{p_4}\,\hat{a}^+_{p_2}\,\hat{b}^+_{p_1 s_1}|0\rangle$$

el cual es nulo porque consideramos que son diferentes las configuraciones iniciales y finales de momento y spin. A orden uno tendremos:

$$S^{(1)}_{fi} = \langle f|\, i\int d^4x\, g :\phi(x)\bar{\Psi}(x)\Psi(x): |i\rangle$$
$$= ig\int d^4x \,\langle f| :\phi(x)\bar{\Psi}(x)\Psi(x): |i\rangle \quad , \text{pero}$$

$$:(\phi^{(+)}+\phi^{(-)})(\bar{\Psi}^{(+)}+\bar{\Psi}^{(-)})(\Psi^{(+)}+\Psi^{(-)}): =$$

$$:(\phi^{(+)}\bar{\Psi}^{(+)} + \phi^{(+)}\bar{\Psi}^{(-)} + \phi^{(-)}\bar{\Psi}^{(+)} + \phi^{(-)}\bar{\Psi}^{(-)})(\Psi^{(+)}+\Psi^{(-)}): =$$

$$:(\phi^{(+)}\bar{\Psi}^{(+)}\Psi^{(+)} + \phi^{(+)}\bar{\Psi}^{(-)}\Psi^{(+)} + \phi^{(-)}\bar{\Psi}^{(+)}\Psi^{(+)} + \phi^{(-)}\bar{\Psi}^{(-)}\Psi^{(+)}$$
$$+ \phi^{(+)}\bar{\Psi}^{(+)}\Psi^{(-)} + \phi^{(+)}\bar{\Psi}^{(-)}\Psi^{(-)} + \phi^{(-)}\bar{\Psi}^{(+)}\Psi^{(-)} + \phi^{(-)}\bar{\Psi}^{(-)}\Psi^{(-)}):$$

Ahora bien, dados los estados inicial y final

$$\langle 0|\,\hat{b}_{p_3 s_3}\,\hat{a}_{p_4}\,(\quad)\,\hat{a}^+_{p_2}\,\hat{b}^+_{p_1 s_1}|0\rangle$$

necesitaré en ( ) dos operadores de ϕ $(\hat{a}, \hat{a}^+)$ y dos de $\Psi(\hat{b}, \hat{b}^{+})$ es decir:

$$\phi^{(+)}, \phi^{(-)}, \Psi^{(+)}, \bar{\Psi}^{(-)}$$

pero con productos de tres operadores no podemos hacer que queden términos $\neq 0$. A orden "1" (un vértice) físicamente vemos que no es posible linkear cuatro patas externas.

Vamos a orden "2", donde tenemos dos vértices:

$$S_{fi}^{(2)} = \langle f | \frac{(-ig)^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \, T\left(:\hat{\phi}(1) \hat{\bar{\Psi}}(1) \hat{\Psi}(1) :: \hat{\phi}(2) \hat{\bar{\Psi}}(2) \hat{\Psi}(2): \right) | i \rangle$$

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{(-ig)^2}{2!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \, \langle f | T\left(:\hat{\phi}(1) \hat{\bar{\Psi}}(1) \hat{\Psi}(1) :: \hat{\phi}(2) \hat{\bar{\Psi}}(2) \hat{\Psi}(2): \right) | i \rangle$$

Aplicamos el teorema de Wick:

$$T(:\ldots::\ldots:) = :\hat{\phi}(1) \hat{\bar{\Psi}}(1) \hat{\Psi}(1) \hat{\phi}(2) \hat{\bar{\Psi}}(2) \hat{\Psi}(2):$$

$$+ :\hat{\phi}(1) \hat{\bar{\Psi}}(1) \hat{\Psi}(1) \hat{\phi}(2) \hat{\bar{\Psi}}(2) \hat{\Psi}(2):$$

$$+ :\hat{\phi}(1) \hat{\bar{\Psi}}(1) \hat{\Psi}(1) \hat{\phi}(2) \hat{\bar{\Psi}}(2) \hat{\Psi}(2):$$

$$+ :\hat{\phi}(1) \hat{\bar{\Psi}}(1) \hat{\Psi}(1) \hat{\phi}(2) \hat{\bar{\Psi}}(2) \hat{\Psi}(2):$$

+ dobles contracciones + triples contracciones

De las simples contracciones es claro que contracciones de los mismos campos como 1,5,9 son nulos porque no hay manera de emparejar los operadores de creación y destrucción.

Por otro lado, en nuestra situación necesitamos ~~[illegible]~~ no contraídos los campos que serán patas externas $\phi, \phi, \Psi, \bar{\Psi}$ → 2,3,4,7 son nulos.

El término sin propagadores (sin contracciones) no aporta porque corresponde a 6 campos (no es la física que estamos queriendo describir.

Las dobles y triples contracciones corresponden a 2 y 3 propagadores y tampoco corresponden a la situación física de tener dos partículas IN y dos partículas OUT.

PROBLEMA 2

#2

Entonces sobreviven los términos asociados a

$$(b)\quad \hat{\bar\Psi}(1)\,\hat\Psi(2) : \hat\phi(1)\,\hat{\bar\Psi}(1)\,\hat\phi(2)\,\hat{\bar\Psi}(2) :$$

$$(e)\quad \hat{\Psi}(1)\,\hat{\bar\Psi}(2) : \hat\phi(1)\,\hat{\bar\Psi}(1)\,\hat\phi(2)\,\hat{\bar\Psi}(2) :$$

pero son el mismo con el cambio $x_1 \to x_2$ ★

$$T(:\ldots::\ldots:) = \underbrace{\hat{\bar\Psi}(1)\,\hat\Psi(2)}_{iS_F(x_1-x_2)} : \underbrace{\hat\phi(1)\,\hat\Psi(1)\,\hat\phi(2)\,\hat{\bar\Psi}(2) :}_{\equiv A}$$

Calculemos entonces el factor A

$$A \equiv :\left(\hat\phi^{(+)}_{(1)}+\hat\phi^{(-)}_{(1)}\right)\left(\hat\Psi^{(+)}_1+\hat\Psi^{(-)}_1\right)\left(\hat\phi^{(+)}_{(2)}+\hat\phi^{(-)}_{(2)}\right)\left(\hat{\bar\Psi}^{(+)}_2+\hat{\bar\Psi}^{(-)}_2\right): =$$

$$:\Big(\underbrace{\hat\phi^{(+)}_{(1)}\cdot\hat\Psi^{(+)}_{(1)}}_{(I)} + \underbrace{\hat\phi^{(+)}_{(1)}\cdot\hat\Psi^{(-)}_{(1)}}_{(II)} + \underbrace{\hat\phi^{(-)}_{(1)}\cdot\hat\Psi^{(+)}_{(1)}}_{III} + \underbrace{\hat\phi^{(-)}_{(1)}\cdot\hat\Psi^{(-)}_{(1)}}_{(IV)}\Big)\times$$

$$\Big(\underbrace{\hat\phi^{(+)}_{(2)}\cdot\hat{\bar\Psi}^{(+)}_{(2)}}_{(1)} + \underbrace{\hat\phi^{(+)}_{(2)}\cdot\hat{\bar\Psi}^{(-)}_{(2)}}_{(2)} + \underbrace{\hat\phi^{(-)}_{(2)}\hat{\bar\Psi}^{(+)}_{(2)}}_{(3)} + \underbrace{\hat\phi^{(-)}_{(2)}\hat{\bar\Psi}^{(-)}_{(2)}}_{(4)}\Big):$$

Estos son 16 términos, pero no todos aportan. Para que

$$\langle 0|\,\hat b_{p_3 s_3}\,\hat a_{p_4} :H: \hat a^{+}_{p_2}\,\hat b^{+}_{p_1 s_1}|0\rangle \neq 0$$

necesito que $H \propto \phi^{(+)}\phi^{(-)}\Psi^{(+)}\bar\Psi^{(-)}$, es decir tener creación y destrucción del bosón ($\phi^{(-)}$ y $\phi^{(+)}$) y creación y destrucción del fermión ($\bar\Psi^{(-)}$, $\Psi^{(+)}$)

Haciendo las multiplicaciones, se ve que $(I\times 4)$, $(II\times 2)$, $(II\times 3)$, $(III\times 2)$, $(III\times 3)$, $(IV\times 1)$ sirven en principio porque tienen dos (+) y dos (−). Pero pidiendo que sean $\bar\Psi^{(-)}$ y $\Psi^{(+)}$, $\phi^{(+)}$, $\phi^{(-)}$ sobreviven $(I\times 4)$ y $(III\times 2)$.

De los 16 me quedaré con:

$$:\hat\phi^{(+)}_{(1)}\,\hat\Psi^{(+)}_{(1)}\cdot\hat\phi^{(-)}_{(2)}\,\hat{\bar\Psi}^{(-)}_{2}:$$

$$:\hat\phi^{(-)}_{(1)}\,\hat\Psi^{(+)}_{(1)}\cdot\hat\phi^{(+)}_{(2)}\,\hat{\bar\Psi}^{(-)}_{2}:$$

★ Esta duplicidad da cuenta del 2! en el denominador

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{(-ig)^2}{(2!)} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \, \langle f| (: \hat{\phi}^{(+)}_{(1)} \hat{\Psi}^{(+)}_{(1)} . \hat{\phi}^{(-)}_{(2)} \hat{\bar{\Psi}}^{(-)}_{(2)} :) |i\rangle \; i S_F(x_1-x_2)$$

$$S_{fi}^{(2)} = \frac{(-ig)^2}{(2!)} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \, \langle f| : \int d^3q_1 \, N_{q_1} \hat{a}_{q_1} e^{-iq_1x_1} \int d^3q_2 \, N_{q_2} \sum_{\sigma_2} \hat{b}_{q_2\sigma_2} u_{q_2\sigma_2} e^{-iq_2x_1}$$

$$\int d^3q_3 \, N_{q_3} \hat{a}^+_{q_3} e^{iq_3x_2} \int d^3q_4 \, N_{q_4} \sum_{\sigma_4} \hat{b}^+_{q_4\sigma_4} \bar{u}_{q_4\sigma_4} e^{iq_4x_2} . \; i S_F(x_1-x_2) : |i\rangle$$

Metemos hacia adentro $\langle f| \dots |i\rangle \to$

$$= \frac{(-ig)^2}{(2!)} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^3q_1 \int d^3q_2 \int d^3q_3 \int d^3q_4 \, N_{q_1} N_{q_2} N_{q_3} N_{q_4} \sum_{\sigma_2} \sum_{\sigma_4}$$

$$e^{-iq_1x_1} u_{q_2\sigma_2} e^{-iq_2x_1} e^{iq_3x_2} \bar{u}_{q_4\sigma_4} e^{iq_4x_2} \; i S_F(x_1-x_2)$$

$$\langle f| : \hat{a}_{q_1} \hat{b}_{q_2\sigma_2} \hat{a}^+_{q_3} \hat{b}^+_{q_4\sigma_4} : |i\rangle$$

Este valor de expectación es:

$$\langle 0| \hat{b}_{p_3s_3} \hat{a}_{p_4} : \hat{a}_{q_1} \hat{b}_{q_2\sigma_2} \hat{a}^+_{q_3} \hat{b}^+_{q_4\sigma_4} : \hat{a}^+_{p_2} \hat{b}^+_{p_1s_1} |0\rangle =$$

$$\underbrace{\langle 0| \hat{b}_{p_3s_3} \hat{a}_{p_4} \hat{a}^+_{q_3} \hat{b}^+_{q_4\sigma_4}}_{\equiv B} \underbrace{\hat{a}_{q_1} \hat{b}_{q_2\sigma_2} \hat{a}^+_{p_2} \hat{b}^+_{p_1s_1} |0\rangle}_{\equiv A} =$$

Operamos primeramente en A:

$$\begin{aligned}
A &= \hat{a}_{q_1} \hat{a}^+_{p_2} \hat{b}_{q_2\sigma_2} \hat{b}^+_{p_1s_1} |0\rangle \\
&= \hat{a}_{q_1} \hat{a}^+_{p_2} \left(\delta(q_2-p_1) \delta_{\sigma_2 s_1} - \hat{b}^+_{p_1s_1} \hat{b}_{q_2\sigma_2} \right) |0\rangle \\
&= \hat{a}_{q_1} \hat{a}^+_{p_2} |0\rangle \, \delta(q_2-p_1) \delta_{\sigma_2 s_1} \\
&= \left(\delta(q_1-p_2) + \hat{a}^+_{p_2} \hat{a}_{q_1} \right) |0\rangle \, \delta(q_2-p_1) \delta_{\sigma_2 s_1} \\
&= \delta(q_1-p_2) \delta(q_2-p_1) \delta_{\sigma_2 s_1}
\end{aligned}$$

Como se tiene el mismo patrón en B resulta:

$$\langle 0| \dots |0\rangle = \delta(q_3-p_4) \delta(q_4-p_3) \delta_{s_3\sigma_4} \delta(q_1-p_2) \delta(q_2-p_1) \delta_{\sigma_2 s_1}$$

Ahora colapsando en las integrales tendremos:

PROBLEMA 2

#3

$$\frac{(-ig)^2}{2!}\int d^4x_1\int d^4x_2 \; N_{p_2} N_{p_1} N_{p_4} N_{p_3} \sum_{s_3 s_1} e^{-ip_2x_1}\, u_{p_1s_1}\, e^{-ip_1x_1}$$

$$e^{ip_4x_2}\,\bar{u}_{p_3s_3}\, e^{ip_3x_2}\; iS_F(x_1-x_2) =$$

$$\frac{(-ig)^2}{2!}\int d^4x_1\int d^4x_2 \left(\prod_{i=1}^{4} N_{p_i}\right)\sum_{s_1,s_3}\Big(e^{-i(p_1+p_2)x_1}\, u_{p_1s_1} \times$$

$$e^{i(p_3+p_4)x_2}\,\bar{u}_{p_3s_3}\; iS_F(x_1-x_2)\Big)$$

Ahora procedemos en forma idem con el otro término

$$S^{(2)}_{fi} = \frac{(-ig)^2}{2!}\int d^4x_1\int d^4x_2 \langle f|\, T(:\hat{\phi}^{(-)}_{(1)}\hat{\Psi}^{(+)}_{(1)}\hat{\phi}^{(+)}_{(2)}\hat{\bar{\Psi}}^{(-)}_{(2)}:)\,|i\rangle$$

$iS_F(x_1-x_2)$

$$S^{(2)}_{fi} = \frac{(-ig)^2}{2!}\int d^4x_1\int d^4x_2 \langle f|: \int d^3q_1\, N_{q_1}\, \hat{a}^{+}_{q_1}\, e^{iq_1x_1} \times$$

$$\int d^3q_2\, N_{q_2}\sum_{\sigma_2}\hat{b}_{q_2\sigma_2}\, u_{q_2\sigma_2}\, e^{-iq_2x_1}\int d^3q_3\, N_{q_3}\,\hat{a}_{q_3}\, e^{-iq_3x_2}$$

$$\int d^3q_4\, N_{q_4}\sum_{\sigma_4}\hat{b}^{+}_{q_4\sigma_4}\,\bar{u}_{q_4\sigma_4}\, e^{iq_4x_2}\; iS_F(x_1-x_2):|i\rangle.$$

Metiendo $\langle f|..|i\rangle$ hacia adentro hasta los operadores resulta

$$\langle 0|\,\hat{b}_{p_3s_3}\,\hat{a}_{p_4}:\hat{a}^{+}_{q_1}\,\hat{b}_{q_2\sigma_2}\,\hat{a}_{q_3}\,\hat{b}^{+}_{q_4\sigma_4}:\hat{a}^{+}_{p_2}\,\hat{b}^{+}_{p_1s_1}|0\rangle$$

$$\langle 0|\,\hat{b}_{p_3s_3}\,\hat{a}_{p_4}\,\hat{a}^{+}_{q_1}\,\hat{b}^{+}_{q_4\sigma_4}\,\hat{b}_{q_2\sigma_2}\,\hat{a}_{q_3}\,\hat{a}^{+}_{p_2}\,\hat{b}^{+}_{p_1s_1}|0\rangle$$

como el patrón es similar al ya hecho, podemos poner:

$$\langle 0|\dots|0\rangle = \delta(p_3-q_4)\,\delta_{s_3\sigma_4}\,\delta(p_4-q_1)\cdot\delta(q_2-p_1)\,\delta_{\sigma_2 s_1}\,\delta(q_3-p_2)$$

Esto es similar al anterior solo que cambian las deltas de los ϕ (como era de esperarse).
Colapsando las deltas en las integrales de $\int dq_i$ como se hizo en el caso anterior resulta:

$$\frac{(ig)^2}{2!}\int d^4x_1\int d^4x_2\left(\prod_{i=1}^{4}N_{p_i}\right)\sum_{s_1 s_3} e^{-ip_4x_1}\,u_{p_1s_1}\,e^{-ip_1x_1}\;\times$$

$$e^{ip_2x_2}\,\bar{u}_{p_3s_3}\,e^{ip_3x_2}\;iS_F(x_1-x_2)$$

La contribución total a orden 2 será entonces:

$$\boxed{S_{fi}^{(2)} = (-ig)^2\int d^4x_1\int d^4x_2\left(\prod_{i=1}^{4}N_{p_i}\right)\sum_{s_1 s_3}\left(e^{-ip_4x_1}+e^{-ip_2x_1}\right)u_{p_1s_1}e^{-ip_1x_1}\;\times\;\left(e^{ip_2x_2}+e^{ip_4x_2}\right)\bar{u}_{p_3s_3}\,e^{ip_3x_2}\;iS_F(x_1-x_2)}$$

PROBLEMA 2
#4

(b) Los diagramas de Feynman correspondientes a c/u de los términos son los siguientes: